# A matematika bűvölete

## Találkozás a végtelennel

A végtelennel először a matematika területén találkoztam. Ott érintett meg, ott bűvölt el ez az emberi fogalomalkotásnak keményen ellenálló fogalom, az a valami, amit az emberi gondolkodás a „végtelen” fogalmában próbál megragadni, maga számára érthetővé tenni. Érdekes módon, csak sokkal később, a filozófiai tanulmányaim során tudatosult bennem igazán, hogy az idő, a tér, az emlékezés, a lélek, Isten, mind a végtelen megjelenési formái. Persze az idő végtelenségének, kezdet és végnélküliségének „kezdetektől fogva” tudatában voltam. Éppen úgy, mint a számsor végtelenségének, hiszen a mindennapi gondolkodás számára az időfolyam, a számsor „jeleníti meg” elsősorban a végtelent, a határ nélküliséget. De először éppen úgy, mint mások, semmi különlegeset, semmi lenyűgözőt nem találtam abban, hogy nincsen túl nem haladható időpont éppen úgy, mint ahogy nincsen olyan szám, amelynél nagyobbat, vagy éppenséggel kisebbet el ne lehetne gondolni. A végtelen igazi csodája a matematika tanulmányaim során tárult fel először számomra.

## Középiskolai matematika tanulmányok

A végtelennel összefüggő kérdésekkel való első találkozásom ideje, helye pontosan meghatározható. Középiskola második osztályában, 1969 októberében tanultunk a négyzetgyök fogalmáról. Ez volt a gimnáziumi második osztályos matematika tananyag egyik főfejezete. A Pitagorasz-tétel után tárgyalta a matematika könyv a négyzetgyök fogalmát, majd néhány azonosságot a négyzetgyökös kifejezések körében. E részek tárgyalását követte "*A  egy érdekes tulajdonsága*" című fejezet. A gondolatmenet abból indult ki, hogy a táblázatokban három tizedesjegy pontossággal megadott érték valójában csak közelítő érték, amiről bárki meggyőződhet. A ** értéke persze jóval pontosabban is meghatározható, azonban soha nem pontosan. A könyv megállapítja, hogy a gyök kettő értékét egy nem szakaszosan ismétlő végtelen tizedes tört adja meg. Itt szerepel először a "*végtelen*" szó. Azaz a végtelenségig lehet pontosítani a gyök kettő értékét megadó tizedes törtet, azonban egzakt pontossággal soha nem lehet olyan értéket találni, amelyet négyzetre emelve pontosan kettőt kapnánk. A könyv még hozzáteszi, hogy ebben az esetben – bizonyíthatóan – nem olyan tizedestörtről van szó, amelynek egyes szakaszaiban szereplő számok azonos sorrendben folyamatosan ismétlődnek, azaz a gyök kettő értékét megadó végtelen tizedes tört nem szakaszos végtelen tizedestört. Ezzel kapcsolatban jegyzi meg továbbá a könyv, hogy a ** nem írható fel két egész szám hányadosaként. Ezt követően kerül sor ezen állítás bizonyítására. Az állítás bizonyítása nagyon tetszett nekem. A bemutatott bizonyítás az úgynevezett indirekt bizonyítások csoportjába tartozik. A bizonyítás kiindulópontja az, hogy felteszi, hogy az állítás tagadása igaz. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a bizonyítás azt feltételezi, hogy a ** mégiscsak felírható két egész szám hányadosaként. Innen továbblépve azonban – csak bizonyítottan igaz matematikai átalakításokat végezve – olyan eredményre jut, amely nyilvánvalóan lehetetlen. Ebből az következik, hogy a bizonyítás kiinduló feltételezése szükségszerűen hamis, vagyis nem áll fenn az, hogy a ** két egész szám hányadosaként felírható. Itt szó szerint idézem a könyvet: "*A bizonyítás lényege, hogy megmutatjuk: az állítás tagadásából kiindulva olyasmi következik, aminek lehetetlensége nyilvánvaló. Ebből következik, hogy az állítás tagadása nem lehet igaz, tehát az eredeti állítás igaz. Az itt leírt bizonyítási módot indirekt bizonyításnak nevezik.*"[[1]](#footnote-1) Ez a mondat volt az a mondat, amely már akkor − tizenöt éves fejjel − nagyon elgondolkodtatott, s amelynek igazáról egyáltalán nem voltam meggyőződve. Nem a bemutatott bizonyítást kérdőjeleztem meg, hibásnak tekintve azt. Elfogadtam a bemutatott bizonyítást helyesnek. Maga a bizonyítás egyébként nagyon tetszett nekem. Kimondottan elbűvölt, hiszen néhány elemi matematikai átalakítás után egy olyan összefüggéssé alakította át a kiinduló állítást, amelyben az egyenlőségjel bal oldalán egy (tetszőleges) pozitív egész szám négyzete szerepelt, míg az egyenlőségjel jobb oldalán egy ettől különböző, de ugyancsak tetszőleges pozitív szám négyzete szerepelt, azonban itt kettővel szorozva. Látszólag a  összefüggésben semmi ellentmondás nincsen. Valójában azonban nem ez a helyzet. Nincs ugyanis olyan pozitív egész  és  szám, amelyre a szóban forgó egyenlet teljesülne. Ennek az az oka, hogy a  és  számok minden törzstényezője páros kitevővel szerepel. Az egyenlet jobb oldalán azonban a 2-es páratlan kitevővel lép fel. A baloldalon vagy nem szerepel a 2-es, vagy, ha szerepel, akkor kitevője páros. Következésképpen nincs olyan két pozitív egész szám, amelyre a fenti összefüggés teljesülne. A bizonyítást nagyon frappánsnak találtam. A számomra megragadó szépsége ebben az egyszerűségében volt. Már azon nagyon elgondolkodtam, hogy a végtelen sok természetes szám között nem lehetséges két olyan számot találni, amelynek a hányadosa éppen gyök kettő értékével lenne pontosan egyenlő. Bár mindez meglehetősen furcsa volt számomra, de végső soron mindezt akkor még nem találtam igazán különlegesnek. A könyv által közölt bizonyítást tehát ellenvetés nélkül elfogadtam. Ami azonban egyáltalán nem volt természetes számomra, az ennél sokkal általánosabb jellegű kérdés, nevezetesen az indirekt bizonyítás alapelve volt. Egyszerűen nem volt számomra meggyőző a matematika könyvem érvelése, miszerint "*Ebből következik, hogy az állítás tagadása nem lehet igaz, tehát az eredeti állítás igaz.*" Számomra ez egyáltalán nem volt magától értetődő. Minden további nélkül el tudtam képzelni, hogy a szóban forgó állítás bizonyított hamisságából egyáltalán nem következik az alapállítás igazsága. Ez két másik esetben is lehetséges. Például akkor, ha egy adott állítás nem csak igaz, vagy hamis lehet, hanem még lehetséges valamilyen további, más logikai érték is. Természetesen akkor egzakt módon nem fogalmazódott meg bennem, de ezzel az elképzelésemmel lényegében azt feltételeztem, hogy létezhetnek többértékű logikák, amikor is az "*igaz*", "*nem igaz = hamis*" logikai értékeken kívül más logikai értéke is lehet egy kijelentésnek. A sakkjátszma lehetséges három kimenetele volt erre számomra a legegyszerűbb példa. Nem tudtam én még akkor semmit arról, hogy léteznek többértékű logikai rendszerek, más nem-klasszikus [logikai kalkulusok](http://hu.wikipedia.org/wiki/Logikai_kalkulus) is, melyek elvetik a kizárt harmadik elvét. Később, logikai tanulmányaim során aztán megismertem *Jan Łukasiewicz* valamint *Kleene* többértékű logikai rendszerét, illetve sokat olvastam és hallottam az úgynevezett, [elmosódott halmazok logikájáról, vagyis az úgynevezett fuzzy-logikáról.](http://hu.wikipedia.org/wiki/Elmos%C3%B3dott_halmazok_logik%C3%A1ja) De nemcsak azt sejtettem meg ösztönösen, hogy többértékű logikai rendszerek esetében a könyv állítása egyáltalán nem meggyőző, hanem azt is, hogy minden további nélkül előfordulhat olyan eset, amikor nem lehet eldönteni egy állítás igaz, vagy hamis voltát, vagy ami ezzel egyenértékű, egyaránt lehet bizonyítani egy állítás hamis és igaz voltát egy adott kalkuluson belül. Nem szorul kihangsúlyozásra, hogy a leghalványabb sejtésem sem volt arról, hogy ez az elgondolás *Gödel* híres *nemteljességi tételé*nek is az alapja. Maga Gödel fogalmazta meg ezt a gondolatot a híres tételének publikálásakor, igen egyszerűen és közérthetően: "*A mind tökéletesebb precizitás irányába mutató fejlődés eredményeképpen a matematika egyre nagyobb területei alakultak formalizált elméletté, amelyben a bizonyítások néhány szabály mechanikus alkalmazásának eredményei. napjaink legáltalánosabb formális rendszerei: Whitehead és Russel Principia Mathematicája, valamint Zermelo és Fraenkel által kidolgozott axiomatikus halmazelmélet. Mindkét rendszer elég átfogó ahhoz, hogy benne a jelen matematikájának valamennyi módszere formalizálható, azaz néhány axiómára és következtetési szabályra redukálható legyen. Kézenfekvőnek tűnhetne tehát a feltevés, miszerint ezen axiómák és következtetési szabályok elégséges alapot szolgáltathatnak ahhoz, hogy minden olyan kérdést eldönthessünk, amely az adott formalizálható rendszerben formalizálható. A következők célja annak bizonyítása, hogy a dolog nem áll így: mindkét rendszerben megfogalmazhatók olyan viszonylag egyszerű aritmetikai állítások, amelyek az axiómák alapján eldönthetetlenek.*" [[2]](#footnote-2),[[3]](#footnote-3) .

Emlékszem arra, hogy az akkori matematika tanáromnak, *Beiczer Ödön*nek megemlítettem a kételyeimet, méghozzá mindkét felvetésemet. Nem jól választottam meg azonban az időpontot, hogy "*nagyjelentőségű, metaelméleti*" sejtéseimet megosszam vele. Beiczer Ödön sietett valahova, így nagyon nem volt kedve, indíttatása, hogy velem e kérdésekről beszélgessen. Érzésem szerint a második felvetésem lényegét meg sem értette. Valami olyasmit válaszolt, hogy *"...gondold csak el! Vagy van öt forintod, vagy nincs. El tudsz képzelni még más esetet?*" Azzal megveregette a vállam, otthagyott, s sietett a dolgára. Ott maradtam a tanári asztal előtt állva, s egy kicsit úgy éreztem, igen nagy butaságokat mondhattam neki, ha ilyen rövid úton elintézte velem a problémát. Az általam ösztönösen megérzett problémákon azonban hamar túltettem magam, s a későbbiekben igazán nem is foglalkoztatott ez a kérdés. Beiczer Ödön a következő órán sem tért vissza a felvetésemre. Arra határozottan emlékszem, ekkor már "*Az  függvény*" című fejezet anyagát tanultuk. Az órát azonban úgy zárta, hogy az "*Összemérhető szakaszok*" című olvasmány nem tananyag, de ajánlja mindazok figyelmébe, akik jó jegyet akarnak matematikából. S hozzátette, hogy a "*Szám négyzetgyökének pontosabbá tétele iterációs eljárással*" című fejezetben foglaltakkal is ugyanez a helyzet. Én persze elolvastam mindkét fejezetet. S ezek igen nagy hatással voltak rám. Az "*Összemérhető szakaszok*" fejezet elolvasása alapján vált világossá számomra, hogy milyen módon jelenik meg a világban egy irracionális szám. Itt olvastam arról, hogy példaképpen egy négyzet oldalát egységnyinek tekintve az átlója az egységoldal gyökkettőszöröse. S ekkor értettem meg azt, hogy soha semmilyen módon nem tudnánk olyan méretosztásos vonalzót készíteni, amellyel mindkét szakasz pontosan megmérhető lenne. Ezt nagyon különösnek találtam. Napokig foglalkoztatott a kérdés, s egyfolytában azon tűnődtem, hogy akkor az irracionális számok helyét a számegyenesen nem is tudjuk igazában meghatározni, "kijelölni". Később e kérdésemre részleges választ kaptam, mert megtanultuk, hogyan lehet például a , vagy a  helyét, az euklideszi szerkesztés lépéseivel pontosan meghatározni. Különösen tetszett a  irracionális szám számegyenesen való helyének pontos megszerkesztése. Könnyen beláttam, hogy a gyök három értéke pontosan egy háromdimenziós kocka testátlójának mérőszáma, ha a kocka éleit egységnyi hosszúságúnak tekintjük. S a  hosszúságú szakasz első lépésben való megszerkesztésével már analóg módon szerkeszthető a  hosszúságú szakasz. Nem kell ugyanis mást tennünk, mint egy olyan derékszögű háromszöget szerkeszteni, amelynek hosszabbik befogója éppen  hosszúságú, s a rövidebbik befogója pedig egységnyi hosszúságú. Ekkor átfogóként éppen  hosszúságú szakasz adódik. A négyzetgyökvonás eredményeként adódó irracionális számok számegyenesen való pontos helyének meghatározása ilyen módodon tehát megoldott kérdés. A többi irracionális szám esetében azonban − ismereteim szerint − nem létezik ilyen "*pontos szerkesztési eljárás*". Megdöbbentett az a tény, hogy az irracionális számok abszolút többségének nem is tudjuk megszerkeszteni a helyét a számegyenesen. Ezen a „tényen” nagyon sokat gondolkoztam. Később persze megtudtam, hogy vannak különféle iterációs eljárások e probléma megoldására. A Beiczer Ödön által az "*érdeklődők*" figyelmébe ajánlott második olvasmány éppen erről, konkrétan a négyzetgyök kettő értékének pontosabbá tételéről szólt, erre mutatott be egy iterációs eljárást. Többször figyelmesen, alaposan elolvastam mindkét "*nem kötelező*” olvasmányt. Nemcsak azért, mert persze jó jegyet akartam kapni matematikából, hanem azért, mert érdekeltek az itt tárgyalt kérdések. A valós szám fogalmának ismeretében egyfolytában azon járt az eszem, hogy nem lehetséges-e, hogy a racionális és az irracionális számokon kívül még más számok is "*vannak*" a számegyenesen. Másrészt rendkívül különlegesnek, és számomra roppant érdekes dolognak találtam azt, amit a matematika tanárunk magyarázott nekünk, nevezetesen azt, hogy a racionális és irracionális számok "*együtt*" folytonosan, "*hézagmentesen*" kitöltik a számegyenest. Amikor mindezen kérdésekről beszélt, jelentkeztem, s megkérdeztem, hogy "*ezt honnan tudják?*", (már mint hogy nincsen például további hézag a számegyenesen) másrészt megkérdeztem, hogy a racionális vagy az irracionális számok vannak-e többen? Azt válaszolta, hogy nagyon jó kérdés mindkét kérdés, és van is erre pontos válasz, amit bizonyítani lehet, de ahhoz még további ismertekre van matematikából szükségünk, ahhoz, hogy megérthessük a választ. Így most nem tudja az általam feltett két kérdést egzakt módon megválaszolni, de megnyugtatott minket, hogy aki műszaki, vagy olyan pályára megy, ahol majd egyetemen tanul matematikát, az találkozni fog ezzel a kérdéssel, s ott meg fogják mutatni a választ teljes részletességgel. "*Egyébként pedig a második kérdést illetően az irracionális számok összehasonlíthatatlanul többen vannak, mint a racionális számok.*" − tette még hozzá az elmondottakhoz, lezárva a témakört. Ez a mondata nagyon elgondolkoztatott. Ez megfoghatatlan, kimondottan megdöbbentő volt számomra. Rengeteget tűnődtem azon, hogy miképpen kell érteni azt, hogy "*összehasonlíthatatlanul többen vannak*" az irracionális számok, mint a racionális számok. Ezt a "*többen vannak*" állítást nem értettem. Egyfolytában foglalkoztatott ez a probléma. Érdekes módon a végtelent mindig úgy képzeltem ekkor, mint a számegyenes egyik irányban való korlátlan meghosszabbítását. Ekkor még nem gondoltam bele abba, hogy egy adott szakaszon belül is korlátlanul lehet felsorolni az ott elhelyezkedő számokat. Az már akkor is világos volt számomra, hogy végtelen sok természetes szám van, ami számomra azt jelentette, hogy minden határon túl lehet növelni a számokat, nincs tehát "legnagyobb szám". Ennek analógiájára úgy képzeltem el, hogy az irracionális számok esetében is ez a helyzet. De semmiképpen nem tudtam elgondolni, hogy miképpen lehet "*összehasonlíthatatlanul több*" irracionális szám, mint racionális szám. Beiczer Ödönnek ez a mondata megfejthetetlen talányt, s egyben izgató problémát jelentett számomra. Ezt követően ismét beszéltem Beiczer Ödönnel, aki egy nagyon egyszerű, mindenki számára érthető és követhető – geometriai – bizonyítással megértette velem, hogy a számegyenesen – példaképpen – a [0;1] intervallumban éppenannyi (végtelenül) sok szám van, mint a [0;2] intervallumban, vagy éppenséggel az egész számegyenesen. Ezek a megállapítások, amelyeknek helyességét a Beiczer Ödön által bemutatott egyszerű geometriai bizonyítás révén azonnal beláttam, megdöbbentettek, csodálattal töltöttek el. Valami egészen csodálatos, addig nem tapasztalt dologgal szembesültem akkor, ami lényegében felülírta alapvető, univerzálisan igaznak tartott igazságokról alkotott véleményemet. Bár akkor – és számomra – ez nem került ilyen módon megfogalmazásra, de akkor értettem meg, hogy a végtelen világában nem igaz, nem áll fenn az az egyébként univerzálisan igaz megállapítás, miszerint a rész mindig kisebb az egésznél. Ekkor találkoztam először a végtelennel kapcsolatos elméleti kérdésekkel. Ez volt az a pillanat, amikor először pillantottam meg, értettem meg a "*végtelen világának csodáját*".

1. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára. Harmadik kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, p.34. [↑](#footnote-ref-1)
2. Raymund M. Smullyan: Gödel nemteljességi tételei. Az 1999-ben megjelent első magyar nyelvű kiadás javított és átdolgozott változata. Typotex Kiadó, Budapest, 2003, p.1. [↑](#footnote-ref-2)
3. A (2) szerinti idézet szövegrész elsődleges forrása: Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38. 173-198., 1931. [↑](#footnote-ref-3)