# A végtelennel kapcsolatos matematikai problémák

## Műegyetemi tanulmányaim megkezdése

A műegyetemi matematika tanulmányaim első félévében visszaemlékeztem arra, amit Beiczer Ödön mondott, hogy azok, akik felsőbb matematikai tanulmányokat végeznek, választ kapnak majd egzakt módon azon kérdésekre, amelyeket másodikos gimnazista koromban vetettem fel, s amelyek oly nagyon érdekeltek engem.

A filozófia és a matematika iránti érdeklődésem ugyanis csak erősödött és mélyült a gimnáziumi tanulmányaim során. Igazán e tudományokkal szerettem volna foglalkozni, elméleti szinten, kutatóként, kutató matematikusként. A gimnáziumi tanulmányaim végén felvetődött a hogyan tovább kérdése. Az nem volt egy pillanatig sem kétséges, hogy továbbtanulok, hiszen igen jó tanuló voltam, szerettem tanulni. Kimondottan élvezettel töltött el a tanulás, az ismereteim gyarapítása. A kérdés csupán az volt, hogy mely tudományterületen fejlesztem tovább az ismereteimet. A korosztályom, a korábbi és a későbbi korosztályokhoz képest a legnépesebb korosztály volt, példaképpen a Móricz Zsigmond Gimnáziumban még "i" osztály is volt. Ebből következően a továbbtanulási lehetőségekért igen kiélezett küzdelem folyt, aminek azonban volt pozitív oldala is, hiszen az ebben az időszakban továbbtanulók esetében az átlagos felvételi pontszámok szignifikánsan magasabbak voltak, mint a korábbi, vagy későbbi korosztályok esetében. Következésképpen több jó képességű gyerek tanult tovább, hiszen sokkal nagyobb volt a kínálat, a választási lehetőség, mint korábban, vagy későbben, mivel a felsőoktatásban biztosított helyek száma nem változott a korábbiakhoz képest.

A gimnáziumi tanulmányaim utolsó évében már meglehetősen pontos ismereteim voltak arra vonatkozóan, hogy az egyes szakterületeken milyen elhelyezkedési, továbbfejlődési, és persze nem utolsó sorban milyen kereseti lehetőségek vannak. Legszívesebben filozófiával és matematikával foglalkoztam volna. Azt azonban beláttam, s reálisan felmértem, hogy e területen igen szerény anyagi lehetőségeket, megélhetési feltételeket tudok biztosítani magamnak, s a későbbiekben a családomnak. Az orvosi és a mérnöki pályát ítéltem meg olyan pályáknak, amelyek − természetesen az akkori körülmények között − viszonylagosan jobb megélhetési lehetőséget, vonzó egzisztenciális perspektívát nyújtottak. Orvosnak azonban semmiképpen nem akartam tanulni, mert erre semmiféle indíttatásom, érdeklődésem nem volt. A mérnöki pályát választottam, jóllehet azonnal, felvételi nélkül bejuthattam volna az Eötvös Lóránd Tudományegyetemre. Történelemből a "*Ki miben tudós*" országos versenyben elért eredményem alapján nyitva állt az ELTE kapuja számomra. Akik nem bírtak ezzel a lehetőséggel, azoknak 12-14-szeres túljelentkezéssel kellett számolniuk a bejutásért folytatott versenyben. Én azonban mégis azt választottam, hogy a Budapesti Műszaki Egyetemen folytatom a tanulmányaimat, s gépészmérnöknek tanulok. Vállaltam a felvételi vizsgát matematikából és fizikából. E döntésemben a meghatározó szerepe annak a megfontolásnak volt, hogy úgy ítéltem meg, hogy mérnökként lényegesen jobb anyagi feltételeket tudok biztosítani hosszú távon magamnak és családomnak, mintha a matematikusként, vagy a filozófia művelőjeként próbálnám a kenyeremet megkeresni. A mérnöki tudományok érdekeltek, különösen az energetika. S vonzó volt az is számomra, hogy a Budapesti Műszaki Egyetemen igen színvonalas, erős matematikai képzés volt akkoriban. Másrészt úgy gondoltam már kezdetektől fogva, hogy a műegyetemi tanulmányaimat befejezve tanulhatok még filozófiát vagy matematikát. S ilyen módon biztosíthatom azt, hogy végül is magas, vagy legalábbis magasabb szintű ismereteket szerezhetek e kedvenc tudományterületeimen is. Édesanyám is támogatta ezt a tervemet, sőt a vállalatánál (a Csőszerelőipari Vállalatnál dolgozott igazgatói titkárnőként) azt is elintézte, hogy az ott dolgozó mérnökök közül többen kivittek helyszínekre is, ahol a vállalat szerelési munkákat végzett.

A műegyetemre való bejutás nem okozott problémát számomra. A felvételi vizsgákat 1972. június 28-án (írásbeli vizsga), szerdán és július 3-án hétfőn (szóbeli vizsga) tettem le. A felvételi vizsgáim kiemelkedő eredménnyel sikerültek, s július 18-án, kedden kaptam értesítést arról, hogy felvettek a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karára. Éppen a régi Hűvösvölgyi Ház teraszán üldögéltem, s Hidasi Mónikának írtam levelet, amikor megkaptam az értesítést a műegyetemtől arról, hogy felvettek. Hidasi Mónika levelével együtt hozta a postás az értesítést. Örültem a hírnek persze, s arra is emlékszem, hogy hosszan nézegettem Caspar David Friedrich idilli kertet ábrázoló festményét. Amiről persze nem tudtam, hogy ki a nekem oly nagyon tetsző kép festője.

Az egyetemi tanulmányaimat a tizenegy hónapos sorkatonai szolgálatot követően 1973. szeptember elején kezdtem meg a Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karán.

## Egyetemi matematika tanulmányaim

Hivatalos matematika jegyzetként a Farkas Miklós tanszékvezető egyetemi tanár szerkesztette, nyolcrészes matematika jegyzetsorozatot[[1]](#footnote-1) írták elő számunkra. Emlékszem a pillanatra, amikor kezembe vettem az első kötetet, s belelapozgattam. Egyetemi jegyzetről lévén szó, a matematikai anyag tárgyalása egészen más jellegű volt, mint amihez gimnáziumban hozzászoktunk. Definíciók, tételek, segédtételek, bizonyítások, s példák követték egymást. Ez egy teljesen más, sokkal elvontabb és értelemszerűen egzaktabb tárgyalása volt az adott matematika tananyagnak. Egy kicsit meg is ijedtem, hogy mindezt meg kell nekem tanulni, s ott volt bennem a kétely, hogy képes leszek-e én minderre? De ez a bizonytalanság, ijedelem hamar a semmibe tűnt, mert érdekelt, vonzott az az egzakt, szabatos, abszolút lényegre törő tárgyalásmód, amellyel e jegyzetben, s a későbbiek során a sorozat többi részeiben, találkoztam. Vonzó kihívás volt ez számomra, izgatott és lelkesített, hogy valamikor, talán nem is olyan soká, talán egy félév múlva, talán egy év múlva ebben a számomra most oly különös, s érthetetlen világban otthonosan fogok mozogni, eligazodok, megértem ezt az akkor még oly érthetetlen különös nyelvét a matematikának. A Farkas Miklós szerkesztette jegyzetsorozat tárgyalásmódja egyébként nem csak számomra volt szokatlanul egzakt és szabatos, hanem a felsőbb évfolyamokon tanulók, sőt még a tanszék matematikusai számára is. Alapvetően, lényegileg különbözött példaképpen Dr. Bajcsay Pál írta négykötetes matematika jegyzettől. A Bajcsay professzor írta jegyzet sokkal kevésbé volt "riasztó" a matematika iránt kevésbé érdeklődők számára. Sokkal több szöveges magyarázat volt benne, sokkal több példával, s a bizonyítások is kicsit részletesebbek, jobban elmagyarázottak voltak, összességében e jegyzet sokkal inkább gyakorlatorientált volt, szemben a Farkas Miklós szerkesztette jegyzetsorozattal, amely sokkal inkább az elméleti szabatosságra, az abszolút matematikai egzaktságra, a tananyag tisztán matematikai tárgyalására törekedett. Nem véletlen, hogy felsőbb évfolyamban tanulók rögtön azt javasolták nekünk, hogy azonnal vásároljuk meg a Bajcsay-féle matematika jegyzeteket, "*ha meg akarjuk érteni a matematikát*", mert szerintük a Farkas Miklós szerkesztette jegyzetsorozat egyszerűen "emészthetetlen", s valójában elméleti matematikusoknak készült. Mindebben persze volt erős túlzás, de azért a lényeget valahol nem vétették el. A matematika előadásokat egyébként Bajcsay professzor tartotta számunkra, aki előadásaiban nem vett tudomást a Farkas Miklós tanszékvezető által szerkesztett jegyzetsorozatról. Ő a maga, hosszú évtizedekre támaszkodó gyakorlatának megfelelően a saját jegyzetében foglaltakat adta elő. Így hát mindenki megvette a jegyzeteit, már csak azért is, mert a Farkas Miklós féle jegyzetsorozat II. része éppen nem volt kapható. Én is csak nagy nehézségek árán jutottam hozzá a Farkas Miklós szerkesztette jegyzetsorozat II. kötetéhez, s a hozzá tartozó példatárhoz. Úgy emlékszem, egy Kenei, vagy Kerei Sándor nevű harmadikos hallgatótól vásároltam meg a használt, s meglehetősen rossz állapotban levő jegyzetet és példatárt, aki – jól emlékszem – *"...egyébként nem sokra használható*" kísérőszöveggel adta át nekem a jegyzetét.

Volt valami különös hangulata az első matematika előadásnak. Nem ismertem Bajcsay Pál professzort, így nagy kíváncsisággal vártam, milyen lesz a matematika előadónk. Az első pillanattól kezdve nagyon szimpatikusnak, nagy tudású tanárnak találtam őt. A Farkas Miklós jegyzetsorozat első kötetét azonnal olvasgatni kezdtem, amint megvásároltam. Nem volt könnyű olvasmány, de arra hamar rájöttem, hogy ha az ember elsajátítja pontosan azt a jelölésmódot és terminológiát, amit a jegyzet használ, akkor nem is olyan vészesen érthetetlen mindaz, amit a jegyzetben talál. Akkor rendkívül elvontnak találtam az ott tárgyalt témákat, később azonban, amikor már több és alaposabb ismeretre tettem szert a matematika ezen területén, láttam, hogy a jegyzet csak nagyon röviden, és éppen csak a legfontosabbakra szorítkozva tárgyalja a matematika legalapvetőbb kérdéseit. E kötet a halmazelmélet, a matematikai logika és a valós számok világába avatott be, persze a témakörökből csak a legalapvetőbb kérdéseket tárgyalva. Számomra mindhárom rész igen izgalmas kérdéseket tárgyalt. Akkor még nem tudtam, hogy mind a halmazelmélettel, mind a matematikai logikával a későbbiekben igen sokat fogok foglalkozni, s későbbi tanulmányaim során jelentősen bővítem, továbbfejlesztem ismereteimet e területen.

Már az első néhány előadás során kiderült azonban, hogy Bajcsay Pál nem tartja magát a Farkas Miklós szerkesztette jegyzet tematikájához. Az első előadásokon a racionális és irracionális számkörről, a valós számokról, a valós számhalmaz axiomatikájáról volt szó. Készültem az előadásokra, s együtt haladtam a tananyaggal. Olvastam mind Bajcsay Pál jegyzetét, mind "*A matematika alapjai*" című jegyzetet. Ez utóbbinak az irodalomjegyzékében találtam rá Ruzsa Imre és Urbán János "*A matematika néhány filozófiai problémájáról*"[[2]](#footnote-2) című könyvére. Még aznap kivettem ezt a könyvet a könyvtárból. Pillanatok alatt meggyőződtem arról, hogy ez az a könyv, amely engem igazán érdekel, ez az a könyv, amely az engem olyannyira érdeklő problémákról szól. Elhatároztam, hogy megvásárolom a könyvet. Ez nem volt könnyű, mert nem volt kapható a könyv. Akkor még nem volt lehetőség arra, hogy az ember szinte pillanatok alatt áttekintse a teljes könyvesbolti és antikváriumi könyvkínálatot. A Bartók Béla úti Technika Könyvesboltban kerestem először a könyvet. Itt dolgozott egy idősebb, alacsony termetű eladó, akinek széleskörű ismeretei voltak az antikvár könyvek piacán. Az ő segítségét kértem. Néhány nappal később ismét felkerestem a könyvesboltot, s az illető eladó arról tájékoztatott, hogy a Múzeum Körúton, a Központi Antikváriumban megtalálom az általam keresett könyvet. Hálásan megköszöntem a segítségét, s rögtön a Központi Antikváriumba siettem. Megtaláltam, és persze azonnal megvásároltam a könyvet. A könyv valóban reményeim szerinti volt. S tetszett. Nagyon tetszett. Az elkövetkező napokban egyfolytában e könyvet bújtam. Vittem magammal minden nap az egyetemre, s a táskámban volt akkor is, amikor más programom volt. Az autóbuszokon, villamosokon olvasgattam az egyébként szó szerint igen nehéz könyvet. A könyvet ugyanis fényes, s meglehetősen vastag papírra nyomták, így a több mint ötszáz oldalas könyvnek igen tekintélyes súlya volt, jóval nehezebb volt, mint a hasonló, 100 g/m2-es papírra nyomott, hasonló terjedelmű könyvek. Talán nem túlzás azt állítani, hogy ez a könyv ebben az időszakban a "bibliám" lett. Mindazokat a kérdéseket részletesen tárgyalta, amelyeket a Farkas Miklós szerkesztette jegyzetsorozat első kötete is foglakozott. Azonban e témakörök kifejtése sokkal alaposabb, részletesebb, s sokkal könnyebben érthetőbb volt, mint a Farkas Miklós féle jegyzeté. A valós számok axiomatikája volt az első anyagrész, amit alaposan áttanulmányoztam a Ruzsa Imre könyvéből, ugyanis Bajcsay Pál is e kérdésekkel foglalkozott az előadásain. A racionális számkör tárgyalása során került szóba a végtelen oszthatóság problematikája. Itt olvastam a racionális számok körében értelmezett műveleti szabályokról és egyéb más ezekhez kapcsolódó összefüggésekről, többek között arról az alapvető összefüggésről, hogy ha . Ez az összefüggés mindenki számára ismert és elfogadott, s azt fejezi ki, hogy tetszőleges két racionális szám között van egy harmadik racionális szám, mégpedig a szóban forgó két szám számtani közepe. Mindennek a felismerése önmagában nem igazán meglepő. Azonban kevesen gondolnak bele abba, hogy ez egyben azt is jelenti, hogy nincsenek egymás melletti, "szomszédos" racionális számok. Nem értelmezhető a "szomszédos számok" fogalma racionális számok esetében. Másképpen fogalmazva a számegyenesnek ezt a tulajdonságát, arról van szó, hogy bármely két racionális szám között végtelen sok további racionális szám van. A racionális számkör ezen tulajdonságát úgy nevezik, hogy a racionális számok halmaza nagyság szerinti rendezésre nézve "sűrű" halmaz. Ezek a felismerések már olyan felismerések, amelyek a gondolkodást "elszakítják" a szemléletességtől. Hiszen a számok szomszédos volta a természetes számok világából származó − magától értetődő − "tapasztalat". Igen nagyfokú gondolati elvonatkoztatást jelent ettől a természetes szemléletben meglévő elképzeléstől való elvonatkoztatás, ennek az elképzelésnek a "feladása". A számegyenes vonatkozásában ez azt jelenti, hogy nem értelmezett az a kijelentés, hogy "*a számegyenes két szomszédos pontja*". A számegyenes bármely két pontja között van egy harmadik pont, s belátható az is, hogy két pont között végtelen sok pont helyezkedik el. Ez az elgondolás már lényegesen különbözik attól, ami a "szemléletből" következik. Mindez alátámasztja azt, hogy a végtelen szemléleten kívüli fogalom. A végtelen mibenlétének megragadása nem történhet szemléleti úton. A végtelen fogalmának elemzése, a fogalom tartalmának feltárása, megismerése csak gondolati eszközökkel, csak gondolati úton történhet. Nincs értelme a "*nem tudom elképzelni*" kijelentéseknek, hiszen a végtelent semmilyen érzékletes, szemléleti formában nem lehet elgondolni, elképzelni. A végtelenről nem szerezhető közvetlen tapasztalás, a végtelen nem "*érzékelhető*" közvetlenül. A "*határnélküliség*" sem tapasztalható meg közvetlenül. Az érzéki tapasztalat a világ entitásainak megtapasztalásakor nem halad túl a végesen, legyen szó akár a dolgok közötti összefüggések, az ok-okozati kapcsolatok, vagy éppenséggel térbeli, vagy időbeli "tapasztalásról". A "*határnélküliség*" fogalma már gondolati konstrukció, amely nagyszámú tapasztalat általánosítása révén jött létre. A mindenkori (térbeli, időbeli) konkrét dolgokon való túlhaladás ténye tapasztalható, s ebből vonatkoztatható el a határnélküliség, s ennek alapján a végtelen fogalma. A végtelen fogalma valahol itt eredeztethető.

A matematika területén a természetes számok minden határon túl növelhető sorozata jeleníti meg a végtelent legegyszerűbb formában. A számfogalom kialakulása persze önmagában igen magas fokú absztrakciót feltételez. De állítható, hogy e fogalom birtokában a természetes számok sorozatának minden határon túli növelhetősége "testesíti meg" az emberek számára a végtelent. S az is állítható, hogy az emberek többsége nem is lép túl a végtelen ilyen típusú elgondolásán. A filozófiai gondolkodásban a végtelennek ezt megjelenését, típusát, vagyis valamilyen folyamat (jelen esetben a természetes számok sorozatának) állandó, határ nélküli növelését, a növelés folytatásának "lehetőségét" nevezik potenciális végtelennek.

A potenciális végtelen megnyilvánulása az előbbiekben tárgyalt felismerés is, miszerint a számegyenes bármely két pontja között van egy harmadik, sőt végtelen sok további pont. Érdekes módon a számegyenes korlátlan meghosszabbít-hatóságának elképzelésével szemben a számegyenes ezen lényegi tulajdonsága már "nincs bent" igazán a köztudatban.

Számomra mindebben az volt igazán csodálatos, hogy egy ilyen egyszerű, magától értetődő megállapításnak, nevezetesen annak, hogy két racionális szám számtani közepe a két szám között helyezkedik el, milyen nagy horderejű és messzemenő következményei vannak. Hiszen ez a felismerés lényegében a matematika nyelvén fogalmazta meg a végtelen oszthatóság filozófiai elvét. E felfogás szerint az idő és a tér nem atomos (diszkrét) szerkezetű, hanem folytonos szerkezetű. Nem értelmezhető tehát semmiféle legkisebb időtartam, vagy éppenséggel térrész, távolság. Mindezek a kérdések persze már messze túlmutatnak a matematika területén, s valójában a természettudományok tárgykörébe tartoznak. Számomra azonban ekkor annak a felismerése, megértése volt a leglényegesebb, hogy a matematika alkalmas a kontinuum megragadására. Később persze találkoztam olyan problémákkal, felvetésekkel, amelyek ezt az álláspontot, nézetet alapjaiban megkérdőjelezik. De ekkor még mindez kerek és lezárt egésznek tűnt. Igaz, már gimnáziumban beszélgettünk a kvantumfizikáról, s már hallottam arról is, hogy az energia esetében – a tudomány mai állása szerint – léteznek legkisebb energiamennyiségek (kvantumok). Mindez azonban nem kérdőjelezte meg számomra az előbbi elgondolást.

Nem gondoltam azonban, hogy kicsit alaposabban elmélyedve a problémában, elemezve a folytonosság (matematikai) fogalmát, a helyzet sokkal bonyolultabb, s nehezebben érthetőbb, mint ahogy azt eredetileg feltételeztem. A valós számkör axiomatikájának tárgyalásakor sorba vettük a valós számkör tizenegy algebrai, négy rendezési és egy további, úgynevezett folytonossági axiómáját. A könyvek egyöntetűen azt állították, hogy ezen axiómákból kiindulva már teljes szabatossággal tárgyalható bármilyen matematikai probléma a számok világában. Az algebrai és rendezési axiómák – lévén szó axiómákról – magától értetődő, "triviális" igazságokat fogalmaztak meg. Itt legfeljebb annyi volt az újdonság számomra, hogy rendezett formában, összegyűjtve találkoztam ezekkel az általam már korábban ismert matematikai igazságokkal. A valós számok axiomatikájában kulcsszerepet játszó ún. *Dedekind-féle folytonossági axióma* lényegét azonban csak nagyon nehezen értettem meg. Számomra úgy tűnt, hogy az algebrai axiómák és a rendezési axiómák bőségesen elegendőek, egyszerűen nem értettem, miért van szükség egy további axióma "rendszerbe vételére"? Mindennek megvilágítására a Farkas Miklós írta jegyzet precízen definiálta a korlátosság fogalmát, egészen pontosan az alulról és a felülről való korlátosság fogalmát. Második lépésként került sor a legkisebb felső korlát (supremum), valamint a legnagyobb alsó korlát (infimum) fogalmának szabatos meghatározására. Az elmondottak minden nehézség nélkül érthetőek voltak számomra, hiszen nagyon szemléletesen elképzelhető volt mindez. Arról volt szó, hogy a valós számok tetszőleges A részhalmaza (A ⸦ R) esetében, ha létezik ezen A halmaz legkisebb felső korlátja (sup A), akkor ez a felső korlát két igen lényeges tulajdonsággal bír. Egyrészt vagyis az A halmaz minden eleme kisebb, mint az A halmaz supremuma, másrészt minden -hoz van olyan , hogy . Ezzel analóg módon fogalmazható meg az inf A-t (infimum A-t) jellemző két tulajdonság is. Kezdetben nem értettem azt, hogy miért nem biztosítják az idáigi axiómáink azt, hogy minden felülről korlátos, illetve minden alulról korlátos számhalmaznak létezzen legkisebb felső korlátja (supremuma), illetve létezzen legnagyobb alsó korlátja (infimuma). Nem értettem, hogy miért kell ezt egy újabb axióma, nevezetesen a *Dedekind-féle folytonossági axióma* rendszerbe illesztésével biztosítani. A *Dedekind-féle folytonossági axióma* azt deklarálja, hogy a valós számok halmaza minden nem üres, felülről, illetve alulról korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja, illetve legnagyobb alsó korlátja. Nagyon lassan értettem meg, hogy miért nem igaz a *Dedekind-féle folytonossági axióma* a racionális számok halmazára. Mindennek az oka persze az volt, hogy a dolgok lényegét illetően nem értettem meg azt az állítást, hogy a racionális számok esetében nem értelmezhető a "*szomszédos szám*" fogalma. A *Dedekind-féle folytonossági axióma* ugyanis azt mondja ki, hogy a valós számok halmazának bármely *Dedekind-szelete* esetében létezik pontosan egy olyan valós szám, amely nem kisebb a szóban-forgó *Dedekind-szelet* alsó osztálya egyetlen eleménél, és nem nagyobb a szóban forgó *Dedekind-szelet* felső osztálya egyetlen eleménél sem. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a számegyenesen nincsenek lyukak, vagyis a valós számok folytonosan helyezkednek el a számegyenesen, kontinuumot alkotnak. A *Dedekind-szeletekről* azonban sem a jegyzetekben nem volt szó, sem Bajcsay Pál előadásaiban. E fogalom nyomára "önszorgalomból" jutottam. Nem hagyott ugyanis nyugodni az, hogy nem értettem a Farkas Miklós jegyzetének azt a kijelentését, miszerint a *Dedekind-féle folytonossági axióma* nem igaz a racionális számok halmazán. Egyszerűen nem értettem, hogy miért van ez így. Bajcsay Pálhoz fordultam a problémámmal. Ő végighallgatta a probléma-felvetésemet, amelyet próbáltam − képességeimhez mérten − matematikailag igen szabatosan megfogalmazni. Minderre egy előadás után került sor. Bajcsay professzor úr némán végighallgatott, majd a táblán rajzolni kezdett. Lényegében a *Dedekind-szeleteke*t rajzolta fel, s a következő gondolatmenet magyarázta el. Abból indult ki, hogy vajon lehetséges-e a racionális számok halmazát olyan módon két részre osztani, hogy a két rész hézagtalanul − s itt a hangsúly a "*hézagtalanul*" megszorításon van − lefedi a racionális számok halmazát? Az a kérdés, folytatta, hogy miképpen érintkezik egymással a két, példaképpen  alsó és  felső halmaz? A szemléletesség kedvéért érdemes elgondolni, hogy mi lenne a helyzet a természetes számok halmazának ilyen módon történő két részre osztásakor. Nyilvánvalóan definiálható lenne az L alsó halmaz legkisebb felső korlátja és hasonló módon meghatározható lenne az U felső halmaz legnagyobb alsó korlátja. Az a kérdés, hogy mi a helyzet abban az esetben, ha a racionális számok halmazát akarjuk két részhalmazra osztani. Kiindulásképpen tételezzük fel, hogy megtaláljuk az L alsó halmaz legkisebb felső korlátját, (példaképpen -t), s ugyanígy megtaláljuk az U felső halmaz legnagyobb alsó korlátját (példaképpen -t)). Ebben az esetben értelemszerűen fennáll, hogy . De a korábbiakban már megállapítottuk, hogy , vagyis ellent-mondásra jutottunk, hiszen találtunk olyan számot, amely nagyobb, mint az  alsó halmaz legkisebb felső korlátja és kisebb, mint az U felső halmaz legnagyobb alsó korlátja. Következésképpen nem állhat fenn egyszerre az, hogy létezik az alsó halmaz legkisebb felső korlátja és ugyanakkor létezik a felső halmaz legkisebb felső korlátja. Vagy az alsó halmaz supremuma létezik, és ekkor nem létezik a felső halmaz infimuma, vagy fordítva, azaz létezik a felső halmaz infimuma és nem létezik az alsó halmaz supremuma. Mi a helyzet akkor, ha a valós számok halmazát próbáljuk ugyanilyen módon két részre osztani ugyanilyen módon, azaz úgy, hogy a két részhalmaz teljes egészében lefedje a racionális számok halmazát. Ebben az esetben lehetséges két diszjunkt halmaz (példaképpen  kijelölése olyan módon, hogy e két halmaz uniója a racionális számok halmazát adja, vagyis fennáll az, hogy . Ez olyan módon lehetséges, hogy az osztópont éppen egy irracionális szám. Ekkor ugyanis – éppen ebből következően fennáll, hogy . Azaz az  alsó halmaz minden eleme kisebb, mint az felső halmaz bármely eleme. A két halmaz ebből következően diszjunkt halmaz, s a két halmazt éppen egy irracionális szám választja el egymástól. Ebben az esetben persze értelemszerűen nem létezik sem az  alsó halmaznak legkisebb racionális felső korlátja, s nem létezik az  felső halmaznak sem legnagyobb alsó (racionális) korlátja. Bajcsay professzor le is rajzolta mindazt, amit elmondott. Azt tanácsolta, ha egy kicsit el akarok mélyedni e kérdésben, akkor a *Dedekind-szelet* mibenlétét tanulmányozzam. Mosolyogva és csendesen megjegyezte, hogy ő most lényegében ezt magyarázta el. Bajcsay Pál érvelése világos volt számomra, s akkor úgy éreztem, teljes egészében értem. Megköszöntem a magyarázatot, s az elkövetkező napokban ismét átolvastam – jó néhányszor – a Farkas Miklós jegyzetet, valamint a Ruzsa-féle könyv ide vonatkozó részeit. Világossá vált előttem, miért nem igaz a *Dedekind-féle folytonossági axióma* a racionális számokra. Ezekben a napokban értettem meg igazán azt, hogy a *Dedekind-szelet* a racionális számok halmazának két olyan diszjunkt halmazra való felbontását jelenti, amelyre nézve teljesül az, hogy az egyik (alsó) halmaz minden eleme kisebb, mint a másik (felső halmaz) minden eleme. Ez azt jelenti, hogy a felosztás révén két diszjunkt halmaz jön létre. Megértettem azt, hogy minden egyes racionális számhoz egy-egyértelműen hozzárendelhető egy olyan *Dedekind-szelet*, amelyben az alsó halmaznak van legkisebb felső korlátja (vagy a felső halmaznak van legnagyobb alsó korlátja) és az éppen az adott racionális szám. Megértettem, hogy a két halmaz között osztópontként elképzelhető egy irracionális szám is, ebben ez esetben a *Dedekind-szelet* éppen ezt az irracionális számot foglalja magában. Ekkor persze sem az alsó halmaznak nincs legkisebb felső korlátja, sem a felső halmaznak nincs legnagyobb alsó korlátja. Az is világossá vált számomra, hogy az összes *Dedekind-szelet* együttesen a valós számok halmazát alkotja. Ilyen módon jól elgondolhatóvá vált számomra az, hogy miképpen alkotják a racionális és az irracionális számok együtt a valós számok – hézagmentes – kontinuumát, s hogy ilyen módon valóban a számegyenes minden egyes pontjának – egy-egyértelmű hozzárendeléssel – megfeleltethető egy-egy valós szám. Dedekind elgondolása – az elgondolás lényegének megértését követően – nagyon egyszerűnek és magától értetődőnek tűnt számomra. Ez adta igazi szépségét, gondolatának nagyszerűségét. Talán furcsának tűnik, de akkor szinte mámorosan örültem annak, hogy mindezt megértettem. Úgy éreztem, többet látok a világból. S egyben megértettem azt, hogy egy olyan egyszerű dolog, mint a számegyenes, amely első pillantásra oly egyszerűnek és magától értetődőnek tűnt számomra, milyen bonyolult problémákat és kérdéseket „rejt magában”. Csodáltam és persze egy kicsit irigyeltem is mindazokat az embereket, − így Dedekindet is – akik mindezen dolgokra rájönnek, akik mindezeket a dolgokat megértik.

Mire idáig jutottam, már jelentősen előrehaladtak a matematika előadások. Szó volt időközben a számegyenes további tulajdonságairól, a valós számok Cantor-féle tulajdonságáról, azaz az egymásba skatulyázott intervallumok elvéről, a *Borel-féle lefedési tétel*ről, majd ezen ismeretek birtokában foglalkoztunk a valós számhalmaz számosságával. Elbűvöltek azok a bizonyítások, amelyek megmutatták, hogy a racionális számok halmazának számossága megszámlálható, hogy bármely két szám között végtelen sok racionális szám van, s hogy bármely két szám között végtelen sok irracionális szám van. A legcsodálatosabb élményt azonban a megszámlálhatóan végtelen halmazok fogalmának a definiálása, s a végtelen halmazok tulajdonságainak vizsgálata jelentette. Az alapkérdés e vizsgálódások során annak a kérdésnek az elemzése volt, hogy vajon lehetséges-e a végtelen halmazok között valamiféle nagyságbeli viszonyt megállapítani. Amikor e kérdés először elhangzott, nem tudtunk semmiféle választ adni arra, hogy miképpen lehetne a végtelen halmazokat számosságuk alapján „összehasonlítani”. Pedig végtelen egyszerű volt a válasz e kérdésre. A végtelen halmazok összehasonlítás egyedül olyan módon lehetséges, hogy kölcsönös egyértelmű megfeleltetést valósítunk meg az adott, összehasonlítandó halmazok elemei között. E módszer alkalmazásával pillanatok alatt világossá vált mindenki számára, hogy ugyanannyi páros szám van, mint amennyi páratlan. Az összehasonlítás ezen eredménye még összhangban volt a természetes meggyőződéssel. Mindenki így gondolta ezt. Az alapelv további alkalmazása azonban már a „*természetes meggyőződésnek*” ellentmondó eredményt hozott. Az a megállapítás ugyanis, hogy ugyanannyi páros szám van, mint amennyi természetes szám, már mindenki számára meglepő volt. Ez valami egészen különleges eredmény volt, s ennek a megállapításnak a különlegessége abban állt, hogy világossá vált számunkra, hogy a végtelen halmazok világában nem érvényes az az alapvető – és a véges számosságú halmazok világában érvényes – meggyőződésünk, miszerint valaminek a valódi részhalmaza mindig kisebb, mint az eredeti egész halmaz. Itt szembesültem először azzal a ténnyel, hogy a végtelen területére kalandozva a hétköznapi világ egyik alapvető „ténye” nem áll fenn. Szakszerűen szólva mindez úgy fogalmazható meg, hogy a véges számosságú halmazok világában érvényes – előzőekben említett – alapigazság (miszerint a rész mindig kisebb az egésznél) nem áll fenn, a véges halmazok e tulajdonsága nem öröklődik a végtelen halmazokra. Mindennek a felismerése – számomra legalábbis – megdöbbentő erejű volt.

## Megérint a végtelen

Az előadó Georg Cantor elméletéről beszélt. Megdöbbentő volt számomra, hogy milyen egyszerűen és mégis milyen egzakt módon sikerült meghatározni a „végtelenség” mibenlétét a szóban forgó halmazok számosságának vonatkozásában. Mindezen felismerés alapja az ekvivalenciareláció alkalmazása volt a szóban forgó halmazokra. A megszámlálhatóan végtelen (számosságú) halmazok esetében ugyanis olyan halmazokról van szó, amelyek a természetes számok halmazával ekvivalensek, vagyis e halmazok elemei végtelen sorozatba rendezhetőek, és e sorozat részeiként a természetes számokkal jelölhetők. Az ilyen halmazok a természetes számok halmazával ekvivalens módon végtelenek. Az előadást követően a Ruzsa Imre féle könyvben aztán alaposan tanulmányoztam az ezekkel a kérdésekkel foglalkozó részt. Rendkívül jó könyvnek tartottam és tartom ezt a könyvet, mert érthető, világos módon, ugyanakkor szabatosan magyarázza el mindezeket az állításokat, összefüggéseket. Rendkívül szemléletesnek és meggyőzőnek találtam az e könyvben található geometriai ábrákat, amelyek mind azt célozták bizonyítani, hogy a valós számok bármely két zárt intervalluma egymással ekvivalens halmaz. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a számegyenes két tetszőleges zárt intervallumában levő pontok mindegyike kölcsönös megfeleltetésbe hozható egymással. Nincsen tehát „több”, vagy kevesebb pont a [0,1] intervallumban, mint példaképpen a pozitív valós számokat tartalmazó, 0-tól pozitív irányba induló számegyenesen. Ezek az egyszerű ábrák, amelyeknek számtalan változatát láttam azóta, rendkívüli meggyőző erővel bírtak számomra. S valahogy „kézzelfogható” módon mutatták meg, érzékeltették a végtelen e különös tulajdonságát, megnyilvánulását. Elbűvöltek ezek az ábrák, egyszerűségük, magyarázóerejük miatt. Azon az estébe hajló késő délutánon oly erősen hatásuk alá kerültem, hogy nem tudtam mással foglalkozni. Semmi sem volt ehhez foghatóan izgalmas, újszerű, csalogató számomra. Elhatároztam, hogy ismét, igen alaposan elolvasom Meljuhin könyvét a végtelenről. S elhatároztam az is, hogy tovább fogok kutatni a Fővárosi Szabó Ervin Könyvtárban, a BME Központi Könyvtárában olyan könyvek után, amelyek a végtelennel foglalkoznak. Ezen az estén is megérintett a végtelen. Emlékszem azt is elhatároztam, hogy beiratkozok az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Egyetemi Könyvtárába. Meg voltam győződve arról, hogy e könyvtárban találok „komoly” könyveket a végtelenről, mind olyanokat, amelyek a kérdéskör matematikai vonatkozásait, mind olyanokat, amelyek a kérdéskör filozófiai vonatkozásait tárgyalják. Késő estig fennmaradtam, ami egyébként nem volt szokásom, s egyfolytában hol az egyetemi jegyzetet olvasgattam, hol Ruzsa Imre könyvét. Itt találtam rá arra, amibe – jóllehet a középiskolában minderről tanultunk – akkor bele sem gondoltam, nevezetesen arra, hogy a két ponton áthaladó egyenes egyenlete kifejezhető  alakban, s így mint elsőfokú, invertálható függvény megvalósítja a megfeleltetést a két pont ((a,c)és (b,d)) által meghatározott szakasz y tengelybeli, illetve x tengelybeli vetülete között. Ez az összefüggés is azt demonstrálta, hogy bármely (véges zárt, illetve nyílt intervallum minden zárt, illetve nyílt részintervallumával ekvivalens. Emlékszem, már az ágyban olvastam el azt a részt Ruzsa Imre könyvében, amely azt fejtegette, hogy mindezen eredményekhez mindenféle geometriai segédeszköz nélkül is el lehet jutni. Ruzsa Imre a  invertálható függvényt említette meg annak szemléltetésére, hogy a (0,1) és a (0,+∞) tartományok pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (hozzárendelés). Mindezek alapján megértettem, hogy egy halmaz akkor és csak akkor végtelen halmaz, ha van a halmaz egészével ekvivalens részhalmaza. Ez a végtelen lényegének gondolati megragadását jelentette a halmazok vonatkozásában. Csodás felfedezések voltak mindezek számomra. Úgy éreztem, mindezen felismerések által valami olyan világot ismerek meg, amely csak az értelem, a gondolkodás számára hozzáférhető, s amely túl van a mindennapok érzékelhető valós világán. Nagyon későn aludtam el aznap.

## A filozófia tanulmányok ismételt elhatározása

Másnap hajnalban ébredtem, s elhatároztam, hogy a műegyetemi tanulmányaimat követően be fogok iratkozni az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karára, a Filozófia Szakra. Tudtam azt, hogy az elhatározásom megvalósítása igen nagy nehézségekbe fog ütközni, de – anélkül, hogy a megvalósítás, pontosabban a megvalósíthatóság hogyanját részleteiben kigondoltam volna – meg voltam győződve arról, hogy lesz erőm, hitem, képességem, hogy a tervemet megvalósítsam. A terv megvalósítása persze az akkor számomra alig belátható, igen távoli jövőben volt tervezett. De ettől a pillanattól kezdve ez a gondolat megfogant bennem, s ez a terv a hosszú távú terveim egyik kulcsfontosságú, központi részévé vált. Tekintettel arra, hogy ezen elképzelés megvalósítása a nagyon távoli jövőben volt „*esedékes*”, a megvalósítás részletein nem kezdtem el gondolkodni. Úgy ítéltem meg, erre bőven van még időm, s „addig” a konkrét feltételek is alapvetően változhatnak. Mindez 1973. november 16-án történt, egy pénteki napon.

E nagy tervem új távlatokat adott nekem. Valahogy egészen másképpen tekintettem ettől kezdve a tanulmányaimra, az engem oly nagyon érdeklő matematikai kérdésekre. Az évfolyamtársaimat azonban a legkevésbé sem villanyozták fel ezek az ismeretek, s témák.

## Ismerkedés Georg Cantor világával

Másnap, mintha mi sem történt volna, minden ugyanúgy folyt tovább, mint korábban. Bajcsay Pál is tárgyalta tovább a számosság kérdéskörét, azonban jóval rövidebben, mint a Farkas Miklós féle jegyzet. Én a Ruzsa Imre féle könyvből tanultam meg az idevágó ismereteket. Persze azért átnéztem „*A matematika alapjai*” című jegyzetben található, ide tartózó bizonyításokat is. A számosság fogalmának megalapozása érthető és jól követhető volt számomra. Az alapgondolat az volt, hogy két halmaz számossága akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha a két halmaz kölcsönösen ekvivalens egymással. Ekkor találkoztam először az א0 jelöléssel, amelyet Cantor vezetett be a megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságának jelölésére. Nem okozott különösebb nehézséget számomra annak belátása, hogy a „kisebb”, illetve „nagyobb” fogalma nem definiálható végtelen halmazok esetében ugyanúgy, mint a véges számosságok esetében. Hiszen az ellentmondáshoz vezetne, mert az  reláció a természetes számok körében úgy értelmezett, hogy a  számosságú halmaznak van olyan valódi része, amely  számosságú. A végtelen halmazok esetében ugyanez az értelmezés azt eredményezné, hogy minden végtelen halmaz kisebb önmagánál. Megértettem, hogy az eredeti definíció módosításával nyerhető olyan definíció, amely nem eredményez ellentmondást a végtelen halmazok körében sem. Példaképpen az  reláció fennáll, ha A ekvivalens -nek egy részével, de B-vel nem. „*A számosság fogalma ily módon a természetes szám fogalmának transzfinit („a végtelenen túli”) általánosítása.*”[[3]](#footnote-3) – olvastam Ruzsa Imre könyvében.

A halmazelméleti kérdések tárgyalása során már szóba került a számosság fogalma, az ekvivalencia reláció kérdése, s itt került először egzakt megfogalmazásra az, hogy mit értünk végtelen halmazon. Furcsa módon a végtelen fogalmát már a középiskolai matematikai tanulmányok során használtuk, azonban e fogalmom mibenlétének pontos megvilágítására nem került sor. Itt értettem meg először, hogy minek alapján tekintünk egy halmazt végtelen halmaznak, azaz hogy mit értünk ebben a vonatkozásban a "végtelen" fogalma alatt. A transzfinit számok tehát olyan számok, amelyek a megszámlálhatóan végtelen természetes számokon túl „helyezkednek el”. Ekkor ismertem meg Cantor szenzációs bizonyítását, amelynek alapján belátható, hogy a pozitív törtek egyetlen sorozatba rendezhetők, következésképpen megszámlálhatóan végtelen a számosságuk. Tetszett és igen meggyőzőnek tartottam Cantor bizonyítását, amelyben a pozitív törtek halmazát végtelen mátrixban jelenítette meg, mégpedig olyan módon, hogy a végtelen mátrix -edik sorának -adik oszlopában éppen a  szám szerepel. egyszerűen lenyűgözött ez a bizonyítás. magát a bizonyítás eredményéyt is kissé meglepőnek találtam, miszerint a racionális számok számossága is „csak” megszámlálhatóan végtelen számosság. A bizonyítás hogyanja azonban számomra műalkotás volt. A kontinuum számosság mibenlétének, és az erre vonatkozó bizonyítás megértése már nem ment ilyen simán, de azért megbirkóztam a feladattal. Megértettem, hogy miért nem tekinthető a valós számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságúnak. Cantor a valós számok halmazával ekvivalens halmazokat kontinuum számosságú halmazoknak nevezte. Beláttam, hogy a kontinuum számosság, vagyis a א1 számosság nagyobb a megszámlálhatóan végtelen számosságnál. Világos volt előttem a kontinuumhipotézis lényege is, bár az nem értettem, hogy miért bír ez olyan nagy jelentőséggel. Olvastam a hatványhalmaz fogalmáról, s arról, hogy miért igaz az, hogy a bármely halmaznál nagyobb számosságú az adott halmaz hatványhalmazának számossága.

Az év hátralévő részében azonban már a különféle zárthelyikre, való felkészülés nem tette lehetővé azt, hogy intenzíven haladjak előre a Ruzsa Imre könyv anyagának tanulmányozásával. Az első egyetemi félév zárása nem volt igazán megerőltető számomra, azonban már nem futotta erőmből, időmből arra, hogy olyan behatóan foglalkozzak a végtelennel kapcsolatos engem érdeklő kérdésekkel, mint ahogy ezt a félév első heteiben tettem. A következő félévben Borbély Samu tartott előadásokat a komplex számok tárgykörében. Ez a témakör izgalmas volt számomra, különösen azok a részek, amelyek a *Riemann- felületek*kel foglalkoztak. Itt megint előkerült a végtelen fogalma, s most egy másik oldalról, más közelítésben, a komplex számok világában került tárgyalásra e témakör. Elbűvölt ismét e téma, s igen nagy élvezettel olvastam, sajátítottam el mindazt, ami ezzel a számomra igen izgalmas kérdéssel összefüggésben tanultunk.

## A gondolkodás új módjának elsajátítása

Az egyetemi tanulmányaim első félévében volt egy érdekes nevű tárgyunk, a „*Számítógépek programozása*” című tárgy. Akkoriban, a hetvenes évek első felében – nálunk legalábbis – még nem voltak személyi számítógépek. Nagy számítógép központokban üzemeltek nagy számítógépek. A tárgy oktatási célkitűzése a széleskörűen használt, FORTRAN és az ALGOL 60 programozási nyelvek alapjainak elsajátítása volt. Mind a FORTRAN, mind az ALGOL 60 [általános célú](http://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%81ltal%C3%A1nos_c%C3%A9l%C3%BA_programoz%C3%A1si_nyelv), magas szintű [programozási nyelv](http://hu.wikipedia.org/wiki/Programoz%C3%A1si_nyelv)ek, melyeket elsősorban [matematikai](http://hu.wikipedia.org/wiki/Matematika) számítások (és jelentősebb matematikai számításokat igénylő mérnöki alkalmazások) megkönnyítésére fejlesztettek ki. A FORTRAN (*The IBM Mathematical Formula Translating System* névből) IBM fejlesztésű program éppen úgy általánosan használt programozási nyelv volt, mint az ALGOL 60 (*ALGOrithmic Language*) programozási nyelv. Ez utóbbi programozási nyelvet számítástechnikával foglalkozó, elméleti és gyakorlati szakemberekből álló bizottság fejlesztette ki. A fejlesztés egyik – nem titkolt – célkitűzése az volt, hogy kiküszöböljék a FORTRAN nyelv alkalmazása során jelentkező hibákat, problémákat. A fejlesztési munkák mindkét programozási nyelv esetében az ötvenes években kezdődtek, így a hetvenes évek elejére már komoly tapasztalat halmozódott fel e programozási nyelvek gyakorlati alkalmazását illetően. Sem nekem, sem az évfolyamtársaimnak semmiféle ismerete e területen nem volt, így igazán újszerűek voltak ezek az ismeretek. A leglényegesebb újdonság számunkra nem is annyira magának a programozási nyelv utasításainak megtanulása, hanem a programozás gondolkodásmódjának a megértése, elsajátítása és alkalmazása volt. Ekkor ismerkedtünk meg a feladatmegoldások elemzésével, egy összetett számítási folyamat elemi részfeladatokra bontásának (dekomponálásának) hogyanjával, s azzal, hogy milyen logikai kapcsolatban vannak egymással az összetett számítási eljárás egyes részfeladatai, lépései. Bármilyen szokatlan és minden előzmény nélküli volt mindez, én is, s az évfolyamtársaim is viszonylag hamar belejöttünk mindebbe, s néhány hét után már otthonosan mozogtunk a feladatok folyamatábráinak megszerkesztésében, a feladatok dekomponálásában, s a számítási eljárások logikai menetének meghatározásában. Csakhamar rájöttünk arra, hogy a hangsúly igazán nem is azon van, hogy melyek a konkrét programozási utasítások, s mi annak a pontos logikai szintaxisa. A lényeg azon volt, hogy a számítások logikai struktúráját, kapcsolatait képesek lettünk megállapítani, rekonstruálni, s a folyamatábrák megszerkesz-tésével képessé váltunk a számítási algoritmus programozására. Engem is, de úgy tapasztaltam az évfolyamtársaimat is elbűvölte az, hogy ennek a gondolkodásmódnak az elsajátításával az élet legkülönbözőbb területein igen hatékonyan lehetett a folyamatokat, történéseket megérteni. Az „*és*”, „*vagy*”, „*ha, akkor*”, stb. logikai függvények alkalmazásával a legbonyolultabb cselekvési, döntési folyamatok struktúrája is feltérképezhető volt. Ez nagyon tetszett mindannyiunknak. Elbűvölt az, hogy gyakorlatilag minden – céltudatos – cselekvés esetében megállapítható volt e logikai struktúra. Én igen nagy élvezettel tanultam e tárgyat, s úgy láttam, ezzel nem csak én voltam így. Jól sikerültek a dolgozataink, s önszorgalomból magunk is készítettünk kisebb számítási feladatok megoldására ilyen számítási algoritmusokat, illetve programutasításokat. Lőcs Gyula mindkét könyve[[4]](#footnote-4) igen népszerű volt ezekben az időkben. Mindenki megvásárolta e könyveket, s rongyosra forgattuk őket. A számítási feladatok logikájának megértése, folyamatábrákkal történő rekonstruálása jelentette azonban számunkra az igazi eredményt e tárgy tanulása során. Ennek a későbbiekben, s hangsúlyozottan nemcsak az egyetemi tanulmányok során, igen nagy hasznát vettük, s ezek az ismeretek igen fontos szerepet játszottak a gondolkodásom fejlődésében. A későbbiekben az élet legkülönbözőbb területein, legkülönbözőbb szituációiban világos különbséget lehetett tenni azon emberek között, akik megtanulták a feladatok bináris dekomponálásának elvét, s azok között, akik számára mindez ismeretlen volt. A lényeglátásban jelentkezett az óriási különbség. Mindez a megállapítás természetesen nemcsak saját tapasztalaton alapult, hanem általánosan elfogadott megállapítás.

A mából visszatekintve a műegyetemi matematika tanulmányaimra, az itt szerzett ismereteim döntő szerepet játszottak abban, hogy szilárd elhatározás született bennem az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen való továbbtanulásra. S innen eredeztethető a végtelen kérdésköre iránti erős, s a későbbi életemet meghatározó érdeklődésem.

1. Matematika. Budapesti Műszaki Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Szerkesztette: Dr. Farkas Miklós egyetemi tanár, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973. I. rész: Farkas Miklós: A matematika alapjai; II. rész: Farkas Miklós, Fritz Józsefné, Kiss Ernőné: Egyváltozós valós függvények; III. rész: Farkas Miklós, Farkas Miklósné: Lineáris Algebra; IV. rész: Farkas Miklós, Hoffmann Tiborné: Végtelen sorok; V. rész: Farkas Miklós, Fritz Józsefné: Többváltozós valós függvények; VI. rész: Farkas Miklós, Sonkoly Pál: Differenciálgeometria és vektoranalízis; VII. rész: Dux Erik: Komplex függvények; VIII. rész: Farkas Miklós, Kotsis Domokosné, Mile Károlyné: Differenciálegyenletek. [↑](#footnote-ref-1)
2. Ruzsa Imre, Urbán János: A matematika néhány filozófiai problémájáról. Matematikai logika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966. [↑](#footnote-ref-2)
3. Ruzsa Imre: A matematika néhány filozófiai problémájáról / Ruzsa Imre, Urbán János: Matematikai logika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966. p. 140. [↑](#footnote-ref-3)
4. Lőcs Gyula, Vigassy József: A FORTRAN programozási nyelv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

   Lőcs Gyula: Az ALGOL 60 programozási nyelv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969. [↑](#footnote-ref-4)